

# STATIQUE

## 1.- Quel est l'objectif de la statique ?

*Pour étudier les conditions d'équilibre des solides indéformables.*

- Remarques :
- Un solide est considéré indéformable tant que les déformations restent faibles.
  - Nous serons amenés la plupart du temps à formuler d'autres hypothèses simplificatrices dont les plus courantes sont :
    - le poids des pièces est négligeable face à l'intensité des autres efforts en présence
    - les liaisons seront considérées parfaites (sans jeu, sans frottement, la géométrie des surfaces en contact est parfaite)
    - la répartition des forces de pression est uniforme
    - on se place à l'équilibre strict (lorsque l'adhérence entre les surfaces en contact n'est pas négligée).

## 2.- Comment mener à bien une étude de statique ?

### 2.1.- PREMIERE ETAPE : Isoler un solide :

Isoler un solide c'est considérer le solide seul « déconnecté » de son environnement. Isoler le solide permet d'identifier sans ambiguïté l'influence qu'a le milieu qui environne le solide sur son équilibre.

Le solide étudié sera représenté seul.

- Remarques :
- une représentation symbolique ou schématique sera le plus souvent suffisante.
  - plusieurs solides peuvent être isolé simultanément. On parle alors de « **système de solides** ».
- Les solides qui appartiennent à un même système de solides sont considérés encastres (sans mouvements relatifs possibles).

### 2.2.- DEUXIEME ETAPE : Etablir le bilan des actions mécaniques qui s'exercent sur le solide isolé :

C'est dresser la liste des relations « MILIEUX ENVIRONNANTS → SOLIDE ISOLE ».

- o Ces relations tendent à rompre ou maintenir l'équilibre du solide isolé.
- o Ces relations engendrent des **Actions Mécaniques Extérieures (A.M.E)** (elles proviennent du milieu extérieur au solide isolé).

On rencontre deux types d'actions mécaniques suivant le type de contact qui s'établi entre le milieu environnant et le solide isolé :

- Si le contact est matériel (**contact réel**) : le contact s'établit par l'intermédiaire de liaisons mécaniques qui donnent naissance à des **actions mécaniques de contact**.
- Si le contact est virtuel : le milieu qui environne le solide isolé ne touche pas le solide (isolé) et pourtant sa présence génère des actions mécaniques. Ce sont des **actions mécaniques à distance** (pesanteur, action magnétique).

Actions mécaniques extérieures = Actions Mécaniques de contact + Actions Mécaniques à distance

EXERCICE : Pour l'hélicoptère : Dresser le bilan des AME sous forme de tableau :

Solide isolé = HELICOPTERE	
Liste des actions mécaniques de contact	Liste des actions mécaniques à distance
Action de .....sur .....	Action de .....sur .....
Action de .....sur .....	Action de .....sur .....

### 2.3.- TROISIEME ETAPE : Appliquer le Principe Fondamental de la Statique (P.F.S) :

**†** Si un solide ou un système de solides soumis à un système d'Actions Mécaniques Extérieures (A.M.E.) est en équilibre, alors le torseur associé à ce système d'actions mécaniques est équivalent au torseur nul.

$$\{\tau_{AME/S} = \vec{0}\}$$

Remarque : La réciproque de ce principe est fausse.

### 3.- Action Mécanique

#### 3.1.- Qu'est ce qu'une action mécanique ?

On appelle Action Mécanique, toute cause capable de provoquer ou d'empêcher  $\left. \begin{array}{l} \text{le mouvement du solide} \\ \text{la déformation du solide} \end{array} \right\}$  en translation (forces) et/ou en rotation (moments).

Remarque : une action mécanique extérieure est une action du milieu extérieur sur le solide isolé.

#### 3.2.- Comment modéliser une action mécanique ?

- 3.2.1.- Modèle graphique :
- flèche à corps simple pour les forces  $\rightarrow$
  - flèche à corps double pour les moments  $\Rightarrow$

- 3.2.2.- Modèle mathématique : Torseur d'action mécanique composé :
- d'une résultante de forces (forces élémentaires de contact)
  - d'un moment résultant

L'ensemble de ces deux vecteurs constitue le torseur d'action mécanique.

$$\left\{ \tau_{AME/S} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \left| \begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \\ L \\ M \\ N \end{array} \right. \\ \vec{M}_A \end{array} \right\} \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}_A$$

Remarque : Il faudra écrire un torseur chaque fois qu'on est en présence d'une action mécanique qu'exerce le milieu environnant sur la solide isolé. On parle alors de torseur d'action mécanique Extérieur.

#### 3.3.- Unités :

Unité de Force = Newton      Unité de moment = Newton mètre

Remarque : Le Newton représente le module d'une force constante qui, appliquée à un solide de masse 1 kg lui communique une accélération de  $1\text{m/s}^2$ .

EXERCICE : Pour l'hélicoptère : Dresser le bilan des AME sous forme de tableau :

Solide isolé = HELICOPTERE	
description des actions mécaniques	Torseurs associés à cette action mécanique
Action de .....sur .....au point ...	
Action de .....sur .....au point ...	
Action de .....sur .....au point ...	

#### 3.4.- Principe des actions mutuelles :

Si un solide 1 exerce une action mécanique sur un solide 2 alors le solide 2 exerce une action réciproque sur le solide 1. Ces deux actions sont directement opposées ( $F_{1/2} = - F_{2/1}$  et  $M_{A 1/2} = - M_{A2/1}$ ). Ces actions sont appelées actions mutuelles, elles s'annulent deux à deux.

#### 4.- Plan d'une étude de statique ?

##### 1) Isoler le solide ou le système de solides :

- le représenter seul
- matérialiser graphiquement les actions mécaniques auxquelles il est soumis
- choisir et représenter un système d'axes de projection.

##### 2) Etablir le bilan des A.M.E :

- écrire les torseurs d'action mécanique transmissibles par les liaisons (milieu extérieur / solide isolé) réduits au centre des liaisons
- écrire les torseurs des actions mécaniques à distance
- ramener ces torseurs au même point (point où subsistent le plus d'inconnues)

##### 3) Appliquer le Principe Fondamental de la Statique

- écrire l'équation torsorielle (somme des torseurs = torseur nul)
- développer cette équation en deux équations vectorielles (résultante et moment)
- en déduire les six équations algébriques qui correspondent :
  - aux 3 projections de la résultante (sur  $(O, \vec{x})$ ,  $(O, \vec{y})$ ,  $(O, \vec{z})$ )
  - aux 3 projections du moment (sur  $(O, x)$ ,  $(O, y)$ ,  $(O, z)$ )

## 5.- Dans quels cas peut-on simplifier la résolution de problèmes de statique ?

Le cas général (P.F.S) reste toujours vrai mais son expression se voit simplifiée dans les cas suivant (résolution rapide).

### 5.1.- Dans le cas d'un solide en équilibre sous l'action de deux glisseurs :



**Si un solide est en équilibre sous l'action de deux glisseurs, alors ces deux glisseurs sont directement opposés (même support, même module, sens opposés).**

### 5.2.- Dans le cas des problèmes plans :

Lorsque les supports des glisseurs qui s'appliquent sur le solide sont situés dans un plan.

Trois équations sont à résoudre au lieu de six (deux pour la résultante en général sur (O, x) et (O, y), une pour le moment en général sur (O, z)). Parfois, seule la résolution de l'équation du moment est nécessaire.

La résolution peut être graphique. Le seul cas au programme est celui d'un solide en équilibre sous l'action de trois glisseurs de supports non parallèles.



**Si un solide est en équilibre sous l'action de trois glisseurs de supports non parallèles alors :**  
- ces trois glisseurs ont des supports coplanaires  
- ces trois glisseurs ont des supports concourants en un point  
- la somme vectorielle de ces trois glisseurs est nulle

Remarque : Pour une résolution graphique il faut :

- choisir une échelle pour les forces
- rechercher le point de concours des supports de forces
- résoudre graphiquement la somme vectorielle des forces

**Coplanaire** = Situé dans le même plan

**Résultante** = C'est une force calculée à l'aide d'autres forces connues. La résultante  $\vec{R}$  de n forces est la somme vectorielle de ces n forces.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

**Moment résultant** = Le moment résultant de n forces en un point I quelconque est égal au moment de la résultante  $\vec{R}$  calculé au point I.

$$M_I(\vec{R}) = M_I(\vec{F}_1) + M_I(\vec{F}_2) + \dots + M_I(\vec{F}_n)$$

**Glisseur** = Ensemble d'une droite  $\Delta$  et d'un vecteur. La droite  $\Delta$  est le support du glisseur. Le glisseur n'a pas d'origine fixe le long de  $\Delta$ .

**Pointeur** = Ensemble d'un point et d'un vecteur. Le point est l'origine du pointeur.

**Isoler** = C'est considérer le solide seul.

**Milieu extérieur** = C'est tout ce qui n'appartient pas au solide isolé

**Moment** = Soit un point B appartenant au support d'une force  $\vec{F}$ . Le moment en un point A quelconque de l'espace est défini par la relation :  $\vec{M}_A \vec{F} = \vec{AB} \wedge \vec{F}$ . Ce qui revient à effectuer le produit du glisseur  $\vec{F}$  par le bras de levier d :  $M_A \vec{F} = \vec{F} \cdot d$  (d = distance de A au support de  $\vec{F}$ ).

**Torseur d'actions mécaniques** = C'est l'ensemble de deux grandeurs vectorielles qui modélisent une action mécanique :

- un glisseur qui est une résultante de forces
- un moment résultant

**Point de réduction** = C'est le point où est exprimé le moment ou le torseur

**Changement du point de réduction d'un moment ou d'un torseur** =  $\vec{M}_{B1 \rightarrow 2} = \vec{M}_{A1 \rightarrow 2} + \vec{BA} \wedge \vec{R}$

$$\left\{ \tau_{1 \rightarrow 2} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_B 1 \rightarrow 2 = M_A 1 \rightarrow 2 + \vec{BA} \wedge \vec{R} \end{array} \right\}$$

**Equilibre strict** : Juste avant que le mouvement apparaisse (lorsque l'adhérence n'est pas négligée)

## 6.- Comment modéliser les actions mécaniques ?

### 6.1.- Comment modéliser l'action d'un fluide sur une surface ?

Sur une surface de faible hauteur (inférieure à 5 m) on peut admettre que la répartition des forces de pression est uniforme. Ces forces de pression sont normales à la surface  $S$  sur laquelle s'appuie le fluide. Le support de la résultante  $\vec{F}$  des forces de pression passe par le centre de gravité de la surface  $S$ .

$$p = \frac{\|\vec{F}\|}{S} \quad \text{avec : } - \|\vec{F}\| = \text{module de la résultante des forces de pression en N}$$

-  $S$  = aire de la surface sur laquelle s'exerce la pression en  $m^2$

-  $p$  = pression en Pascal (Pa) autres unités le bar ( $daN/cm^2$ ), le  $N/mm^2$

### 6.2.- Comment modéliser l'action mécanique à distance due à la pesanteur ?

Le poids d'un solide peut être représenté par une force  $\vec{P}$  dont les caractéristiques sont les suivantes :

- point d'application :  $G$  le centre de gravité du solide

- support (ou direction) : la verticale passant par  $G$

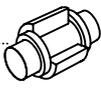
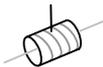
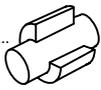
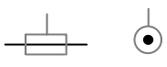
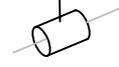
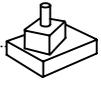
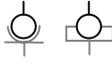
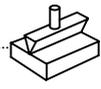
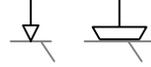
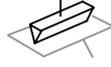
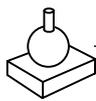
- sens : vers le bas

- module  $\|\vec{P}\| = m \cdot \|\vec{g}\|$  avec :  $\|\vec{P}\|$  = poids en Newton

$m$  = masse en kilogramme

$\|\vec{g}\|$  = accélération de la pesanteur ou attraction terrestre ( $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ )

### 6.3.- Au sein des liaisons parfaites :

Type de contact	Action mécanique transmissible	Représentation 2D	Représentation 3D	Nom de la liaison
	$\vec{F}$ $\vec{M}$			
 Quelconque	$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$			Encastrement
 Zone de contact cylindrique + arrêts axiaux (surfaces de contact planes ou ponctuelles).	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$			Pivot
 Zone de contact prismatique	$\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$			Glissière
 Zone de contact hélicoïdale	$\begin{Bmatrix} X \text{ (liés) } & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$			Hélicoïdale
 Zone de contact cylindrique	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$			Pivot glissant
 Zone de contact sphérique + ponctuelle	$\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$			Sphérique à doigt
 Zone de contact sphérique	$\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$			Rotule
 Zone de contact plane	$\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & 0 \\ Z & N \end{Bmatrix}$			Appui plan
 Zone de contact linéaire annulaire	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$			Linéaire annulaire
 Zone de contact linéaire rectiligne	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & N \end{Bmatrix}$			Linéaire rectilign
 Zone de contact ponctuelle	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$			Ponctuelle

### 6.2.- Au sein des liaisons réelles ?

Il n'est pas toujours possible ou souhaitable de négliger l'adhérence, le jeu ou les défauts géométriques des liaisons mécaniques.

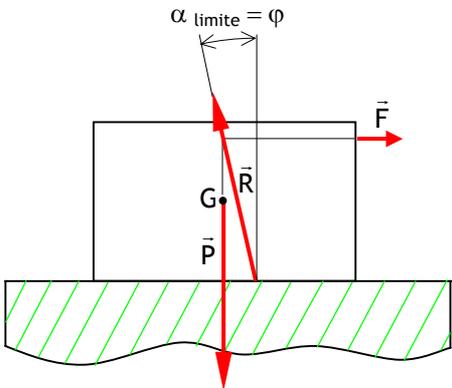
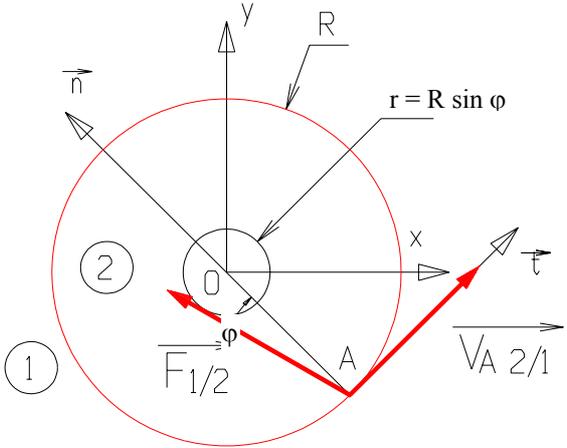
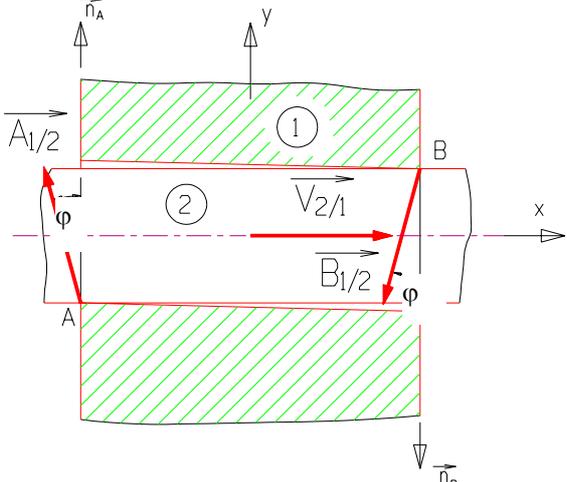
**Remarques :** - Le contact en un point ou suivant une ligne n'est qu'une vue de l'esprit car la pression de contact serait alors infinie. Par conséquent, **le contact entre deux solides se fait nécessairement suivant une surface.**

- D'une façon générale, si on tient compte de l'adhérence, le **support de l'action de contact s'incline d'un angle  $\theta$**  de manière qu'une de ses composantes s'oppose au mouvement. A l'équilibre strict, juste avant que le mouvement apparaisse, l'angle  $\theta$  prend la valeur  $\varphi$  (angle d'adhérence). **La valeur de  $\varphi$  dépend uniquement du type de matériaux en contact et de l'état des surfaces en contact.** Le support de l'action de contact est alors compris dans un cône (cône de frottement) dont le demi angle au sommet a pour valeur  $\varphi$ .

- **Le point d'application de l'action de contact se déplace** (par rapport au même contact considéré sans adhérence) **dans le sens inverse du mouvement** que l'on cherche à provoquer.

Hypothèses pour les cas étudiés :

- La liaison admet un plan de symétrie pour la géométrie des surfaces en contact et pour les charges qu'elle peut transmettre
- On se place à l'équilibre strict
- $\vec{V}_{A 2/1}$  représente le vecteur vitesse de glissement de la surface 2 par rapport à la surface 1.

<p style="text-align: center;">Etude de la liaison appui plan réelle</p> 	<p style="text-align: center;">Etude de la liaison pivot réelle</p> 
<p>Etude de la liaison glissière réelle</p>	
<p style="text-align: center;">Première modélisation</p> 	<p style="text-align: center;">Deuxième modélisation</p> 